Relazione per il 6° simposio Mat^Nat del 12-15 settembre 2019
“Fascino e bellezza della matematica”

Didattica delle matrici applicata al classico problema della somma di potenze di interi successivi.

di Giorgio Pietrocola

Qual è il rapporto tra la bellezza della matematica e la sua didattica? Mentre la matematica notoriamente non è opinabile c’è spazio per opinioni varie e dibattiti per quanto riguarda la sua bellezza.
Paul Dirac, premio Nobel per la fisica nel 1933, affermava che il ricercatore nel suo sforzo di esprimere matematicamente le leggi fondamentali della natura deve mirare soprattutto alla bellezza.
Io estenderei questa affermazione anche alla didattica e alla ricerca matematica pura.
Essendo sempre stato sensibile al fascino della mia materia, nella vita ormai passata di insegnante nelle scuole medie superiori, ho sempre cercato, più o meno consapevolmente, di evidenziare e diffondere tra i giovani anche l’aspetto estetico della materia, attraverso scelte didattiche che tentavano di scardinare stereotipi ben radicati nell’opinione collettiva.
Malgrado il mio entusiasmo, ho dovuto constatare che nella pratica questa operazione non è affatto semplice perchè si deve spesso scontrare con ostacoli di varia natura.
Nonostante sia sempre stato consapevole della soggettività ineliminabile insita nel concetto di bellezza, la mia esperienza ha rafforzato nel tempo la convinzione che anche nella scelta di un percorso didattico la bellezza intrinseca e il fascino storico degli argomenti trattati e dei percorsi proposti, possa svolgere un ruolo primario. Data però la moltitudine dei fattori in gioco, questo precetto da solo non elimina i rischi di insuccesso. Rischi che per altri versi corro anche io in questa comunicazione presentando una proposta didattica basata sull’uso di matrici. A me sembra di una notevole bellezza in quanto mostra con disarmante semplicità come, scelto un opportuno punto di vista e

utilizzando potenti concetti fondamentali della matematica moderna, sia possibile, in modo relativamente semplice, venire a capo di un problema classico che ha fatto riflettere i matematici per moltissime generazioni. Ciò che presento oggi è il frutto dell'evoluzione di una ricerca personale che, anche se in modo discontinuo, è durata parecchi anni. Per questo la mia obiettività può essere messa in dubbio secondo il detto popolare napoletano per cui: "Ogne scarrafone è bell' a mamma soja"
Ma, proprio per questo, ho ritenuto opportuno sottoporre il mio lavoro all'altrui giudizio. Ciò che mi spinge è il desiderio di comunicare con la comunità dei matematici e di verificare i miei risultati ed eventualmente relativizzare le impressioni e le valutazioni messe a punto durante la mia ricerca.
Ecco ora una breve presentazione del problema.

$$S_1^0(n) = \sum_{k=1}^{n} k^0 = 1^0 + 2^0 + \ldots + (n-1)^0 + n^0 = n$$
$$S_1^1(n) = \sum_{k=1}^{n} k^1 = 1^1 + 2^1 + \ldots (n-1)^1 + n^1 = +\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$
$$S_1^2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$
$$S_1^3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots (n-1)^3 + n^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$
$$\ldots ?$$

Le varie sommatorie variano partendo dalla base 1 fino ad n.
I corrispondenti polinomi hanno dei monomi che appaiono solo parzialmente prevedibili.
Se poi la somma di n addendi, invece di cominciare da 1 comincia da 0, il problema varia solo di poco:

$$S_0^0(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^0 = 0^0 + 1^0 + 2^0 + \ldots (n-1)^0 = n$$

$$S_0^1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^1 = 0^1 + 1^1 + 2^1 + \ldots (n-1)^1 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$S_0^2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots (n-1)^2 = \frac{1}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

$$S_0^3(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots (n-1)^3 = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

$$\ldots ?$$

Nel primo caso (esponente m=0), se si pone $0^0=1$, il risultato rispetto al precedente non cambia. Negli altri casi si aggiunge un addendo iniziale nullo e si sottrae l'addendo finale n^m che fa cambiare segno
al monomio secondo in alto grado.
Come variano questi polinomi al variare del grado dell'esponente delle somme di potenze?

Alla fine degli anni '70 senza conoscerne ancora la storia, in un libro di esercizi scolastici mi imbattei in alcuni di questi polinomi per il calcolo delle somme di potenze. Mi venne l'idea di trovarne altri e di ordinare i coefficienti in una matrice quadrata allo scopo di cercare di scoprire un ordine chiarificatore nel loro variare. Mentre infatti per alcuni aspetti le previsioni successive sono semplici, per altri tutto appare piuttosto caotico...

Ecco quel che con mia sorpresa scoprii:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Naturalmente questa uguaglianza continua a valere per matrici di maggiori dimensioni. Il primo fattore è la matrice dei coefficienti polinomiali nei due casi molto simili presentati.
In seguito non conoscendo altri studi sull’argomento, che in parte mi avevano preceduto [Edwards,1982] , riuscii a dimostrare le precedenti uguaglianze e le pubblicai in rete [Maecla,2008]. Chiamai queste matrici basate sul triangolo di Tartaglia ma mancanti dell’ultimo elemento di ogni riga (vedi secondo fattore), “matrici sfregiate”. Infatti la loro mutilazione mi rievocava la ferita da taglio che aveva sfregiato, dopo un duello, il matematico cinquecentesco. Fu proprio per i danni riportati all’apparato boccale che Niccolò Fontana iniziò a tartagliare assumendo il soprannome passato alla storia.
Ciò che mi colpì per la bellezza all’apparenza miracolosa fu l’ulteriore scoperta di una misteriosa relazione capace di “risanare” completamente il famoso triangolo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora grazie alle mie ricerche , il legame tra le matrici sfregiate e il triangolo di Tartaglia da cui derivano, per me non è più oscuro ma limpidissimo. Qui propongo una spiegazione che reputo estremamente semplice, elaborata da me recentemente, dopo aver percorso molte altre vie dimostrative più tortuose. Questa nuova spiegazione mi sembra particolarmente adatta ai ragazzi delle scuole medie superiori purché abbiano nozioni elementari sulle matrici e conoscano lo sviluppo del binomio di Newton. La mia scorciatoia risolve un problema classico che ha impegnato i matematici per moltissimo tempo [Beery,]. Nell'antichità il problema fu affrontato e risolto in casi particolari da matematici quali Pitagora, Archimede [Frajese,1974] e Nicomaco. Poi più tardi il problema fu ripreso da matematici arabi che pure diedero importanti contributi. Quindi nel sedicesimo secolo da Faulhaber che con i suoi metodi ha risolto casi particolari fino al diciassettesimo grado [Knuth,1992]. Poi Fermat e Pascal [Sondow, 2010] che mediante una particolare identità ha risolto ricorsivamente il problema [Edwards,1987]. Poi ancora Jakob Bernoulli nel cui libro pubblicato postumo [Bernoulli,1713] compariva una mirabile formula per polinomi di grado qualsiasi, poi detta formula di Faulhaber [Frank,]. Questa però venne dimostrata solo più di un secolo dopo [Jacobi,1834], utilizzando l'analisi matematica . Da questi cenni storici è evidente che il problema è risultato ostico e non appare verosimile che possa esistere un modo tanto semplice per risolverlo.

Non entro nei particolari dei percorsi didattici perché questi dovranno essere adeguati dagli insegnante alle classi a cui intenderanno rivolgersi. Pur non essendo strettamente necessario, gli alunni dovrebbero potersi giovare dell'ausilio di fogli di calcolo o di altri strumenti in grado di svolgere agevolmente operazioni sulle matrici come il prodotto e il calcolo dell'inversa. L'uso di questi strumenti per operare con le matrici, eliminando i tempi lunghi necessari al calcolo, permette di concentrare l'attenzione sulle proprietà algebriche di questi enti, come ho sperimentato personalmente per lungo tempo, durante le mie attività didattiche in laboratorio.
Ecco dunque gli elementi teorici da me sviluppati che potranno dar corpo alla proposta e che conto, almeno parzialmente, di esporre in questo simposio :

Dalle matrici ricavabili dal triangolo di Tartaglia al problema delle somme di interi successivi esteso a qualsiasi progressione aritmetica

Riassunto:
Inizia con una dimostrazione, il teorema 1B [Maecla,2008], sul modo di ottenere polinomi per somme da *0* a *n-1.*
Avvertenza:
A titolo di esempio i vettori verranno spesso rappresentati con sei componenti e le matrici con sei righe e sei colonne. Nel simbolismo adottato il numero m+1 di componenti non viene specificato perchè m può essere un qualsiasi numero intero non negativo che si è liberi di fissare a piacere .con m massimo grado a cui sono elevati gli interi successivi .

1. Il Teorema "1B"

Sui polinomi corrispondenti alla somma di potenze di interi successivi con basi da *0* a *n-1*

Notazione adottata (ponendo $0^0=1$):

vettori di potenze:

$$\vec{V}(j)=\begin{pmatrix}V_0(j)\\V_1(j)\\V_2(j)\\V_3(j)\\V_4(j)\\V_5(j)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j^0\\j^1\\j^2\\j^3\\j^4\\j^5\end{pmatrix} \qquad h\vec{V}(h)=\begin{pmatrix}h\\h^2\\h^3\\h^4\\h^5\\h^6\end{pmatrix}$$

somme di vettori di potenze:

$$\sum_{j=1}^{n}\vec{V}(j)=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}j^0\\\sum_{j=1}^{n}j^1\\\sum_{j=1}^{n}j^2\\\sum_{j=1}^{n}j^3\\\sum_{j=1}^{n}j^4\\\sum_{j=1}^{n}j^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_1^0(n)\\S_1^1(n)\\S_1^2(n)\\S_1^3(n)\\S_1^4(n)\\S_1^5(n)\end{pmatrix}=\vec{S}_1(n)$$

matrice estratta dal triangolo di Tartaglia:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\1&3&3&0&0&0\\1&4&6&4&0&0\\1&5&10&10&5&0\\1&6&15&20&15&6\end{pmatrix}$$

Partiamo dalla seguente identità tra due vettori derivante dallo sviluppo della potenza del binomio:

$$\begin{pmatrix} (1+i)-i \\ (1+i)^2-i^2 \\ (1+i)^3-i^3 \\ (1+i)^4-i^4 \\ (1+i)^5-i^5 \\ (1+i)^6-i^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \\ 1+3i+3i^2 \\ 1+4i+6i^2+4i^3 \\ 1+5i+10i^2+10i^3+5i^4 \\ 1+6i+15i^2+20i^3+15i^4+6i^5 \end{pmatrix}$$

Utilizzando i vettori definiti all'inizio e tenendo conto del prodotto righe per colonna la precedente diventa:

$$\begin{pmatrix} (1+i) \\ (1+i)^2 \\ (1+i)^3 \\ (1+i)^4 \\ (1+i)^5 \\ (1+i)^6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix}$$

indicando con A la matrice ricavabile dal triangolo di Tartaglia escludendo l'ultimo elemento di ciascuna riga, possiamo sintetizzare l'identità scrivendo:

$$(1+i)\vec{V}(1+i) - i\vec{V}(i) = A\vec{V}(i)$$

sommando membro a membro per *i* variabile da *0* a *n-1* si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{n-1}((1+i)\vec{V}(1+i) - i\vec{V}(i)) = \sum_{i=0}^{n-1} A\vec{V}(i)$$

Sviluppando la somma al primo membro si semplificano a due a due quasi tutti i termini tranne il primo e l'ultimo (effetto telescopico) e raccogliendo la matrice fattore comune al secondo membro si ottiene:

$$n\vec{V}(n) - 0\vec{V}(0) = A\sum_{j=0}^{n-1}\vec{V}(j)$$

Omettendo il vettore sottratto a componenti nulle e sostituendo la somma di vettori con il vettore inizialmente definito si ottiene:

$$n\vec{V}(n) = A\vec{S}_0(n)$$

infine per esplicitare il vettore S si moltiplicano ambo i membri dell'equazione a sinistra per la matrice inversa di A (esistente perché A è una matrice mxm triangolare con determinante il prodotto della diagonale m!, non nullo):

$$\boxed{\vec{S}_0(n) = A^{-1}n\vec{V}(n) \qquad (1)}$$

è così risolto in generale il problema della somma di potenze di interi successivi da 0 a n-1

1.1) Esempio di applicazione del teorema 1B. Caso di m=6 (sette componenti) :

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^5 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{pmatrix}$$

calcolando la matrice inversa:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^4 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^5 \\ \sum_{k=0}^{n-1} k^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \\ n^6 \\ n^7 \end{pmatrix}$$

ossia sviluppando il prodotto righe per colonna:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^0 = n$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^1 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^5 = -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} i^6 = \frac{1}{42}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{7}n^7$$

2. Generalizzazione estesa a qualsiasi progressione aritmetica.

Per lo sviluppo del binomio di Newton abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ h+ri \\ h^2+2hri+r^2i^2 \\ h^3+3h^2ri+3hr^2i^2+r^3i^3 \\ h^4+4h^3ri+6h^2r^2i^2+4hr^3i^3+r^4i^4 \\ h^5+5h^4ri+10h^3r^2i^2+10h^2r^3i^3+5hr^4i^4+r^5i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h+ri)^0 \\ (h+ri)^1 \\ (h+ri)^2 \\ (h+ri)^3 \\ (h+ri)^4 \\ (h+ri)^5 \end{pmatrix}$$

equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 2hr & r^2 & 0 & 0 & 0 \\ h^3 & 3h^2r & 3hr^2 & r^3 & 0 & 0 \\ h^4 & 4h^3r & 6h^2r^2 & 4hr^3 & r^4 & 0 \\ h^5 & 5h^4r & 10h^3r^2 & 10h^2r^3 & 5hr^4 & r^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h+ri)^0 \\ (h+ri)^1 \\ (h+ri)^2 \\ (h+ri)^3 \\ (h+ri)^4 \\ (h+ri)^5 \end{pmatrix}$$

esprimibile come:

$$T_{h,r}\vec{V}(i) = \vec{V}(h+ri)$$

come si vede la moltiplicazione per la matrice $T_{h,r}$ trasforma linearmente la base del vettore di potenze. Per quanto visto sulla matrice $T_{h,r}$ e per le regole dell'algebra delle matrici si ha:

$$\vec{S}_{h,r}(n) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1}(h+ri)^0 \\ \sum_{i=0}^{n-1}(h+ri)^1 \\ \sum_{i=0}^{n-1}(h+ri)^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1}(h+ri)^3 \\ \sum_{i=0}^{n-1}(h+ri)^4 \\ \sum_{i=0}^{n-1}(h+ri)^5 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1}\vec{V}(h+ri) = \sum_{i=0}^{n-1} T_{h.r}\vec{V}(i) = T_{h.r}\sum_{i=0}^{n-1}\vec{V}(i)$$

e quindi per il teorema 1B :

$$\boxed{\vec{S}_{h,r}(n) = T_{h,r}A^{-1}n\vec{V}(n) \qquad (2)}$$

escludendo r=0, h e r possono essere numeri reali qualsiasi (estendibile ai complessi)

Qui il percorso potrebbe terminare con l'esercizio di implementare queste equazioni in un foglio di calcolo. Tuttavia, tempo permettendo, il discorso può continuare ricollegandosi e ampliando i risultati storici.

Complementi

3. Dimostrazione della formula di Faulhaber

Mostreremo che la matrice inversa di A che determina i coefficienti del polinomio (vedi teorema 1B) può essere presentata nella forma classica della formula di Faulhaber:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k+1} B_{m-k} n^{k+1}$$

Dove i B_j sono i numeri di Bernoulli [Coen,1995]. Mostreremo in generale, per qualsiasi numero m+1 di componenti, ciò che qui mostriamo nel caso particolare m=5

$$\begin{pmatrix} 1\frac{1}{1}B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{1}{2}B_1 & 1\frac{1}{2}B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{1}{3}B_2 & 3\frac{1}{3}B_1 & 1\frac{1}{3}B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{1}{4}B_3 & 6\frac{1}{4}B_2 & 4\frac{1}{4}B_1 & 1\frac{1}{4}B_0 & 0 & 0 \\ 5\frac{1}{5}B_4 & 10\frac{1}{5}B_3 & 10\frac{1}{5}B_2 & 5\frac{1}{5}B_1 & 1\frac{1}{5}B_0 & 0 \\ 6\frac{1}{6}B_5 & 15\frac{1}{6}B_4 & 20\frac{1}{6}B_3 & 15\frac{1}{6}B_2 & 6\frac{1}{6}B_1 & 1\frac{1}{6}B_0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procediamo per induzione. Nel caso m=0 (1 riga e una colonna) il risultato del prodotto dell'unica riga per l'unica colonna è B_0 che è 1 elemento neutro, dunque il teorema è vero.
Supponiamo ora vero il caso m-1 ed eseguiamo, nel caso successivo, il prodotto della nostra presunta inversa per la matrice A estraibile dal triangolo di Tartaglia. Sfruttando le risultanze del caso supposto vero e tenendo conto degli zeri aggiunti si costruiscono facilmente tutte le righe della matrice prodotto eccetto l'ultima. Queste non sono altro che le righe del precedente elemento neutro con l'aggiunta di uno zero finale. Rimane quindi da determinare solo l'ultima riga del prodotto. Rimane da dimostrare che l'ultima riga è composta di tutti 0 tranne 1 alla fine.

Moltiplicando la riga m-esima per la colonna j-esima (partendo da 0) e trascurando gli addendi nulli a causa della triangolarità delle matrici, si ottiene:

$$\sum_{k=j}^{m} \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{k+1} B_{m-k}\binom{k+1}{j}$$

Evidenziando il fattore indipendente da k e esprimendo i coefficienti binomiali mediante fattoriali si ha:

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=j}^{m} \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!}\,\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}B_{m-k}$$

cambiando l'ordine dei fattori ed utilizzando la proprietà invariantiva della divisione si ottiene:

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=j}^{m} \frac{(m-j+1)!}{(k+1-j)!(m-k)!}\,\frac{(m+1)!}{j!(m+1-j)!}B_{m-k}$$

esprimendo in forma di coefficiente binomiale ed evidenziando ciò che non dipende da k:

$$\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{j}\sum_{k=j}^{m}\binom{m-j+1}{m-k}B_{m-k}$$

Per le note proprietà dei numeri di Bernoulli, gli elementi dell'ultima riga da j=0 fino a j=m-1, la sommatoria
annulla mentre per j=m la somma si riduce ad un solo addendo uguale a B_0=1. Risultando 1 anche il fattore esterno alla sommatoria, l'ultima riga corrisponde proprio all'ultima dell'elemento neutro.
Dall'unicità della matrice inversa segue la tesi.

3.1 Potenze di progressioni aritmetiche in funzione dei numeri di Bernoulli

in base a quanto visto nel paragrafo precedente la (2) corrisponde a:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(h+rk)^m=\sum_{j=0}^{m}n^{j+1}\sum_{k=j}^{m}\binom{m}{k}\binom{k}{j}\frac{h^{m-k}r^k}{1+j}B_{k-j}$$

4. Sulla matrice $T_{h,r}$

$$T_{h,r}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\ h&r&0&0&0&0\\ h^2&2hr&r^2&0&0&0\\ h^3&3h^2r&3hr^2&r^3&0&0\\ h^4&4h^3r&6h^2r^2&4hr^3&r^4&0\\ h^5&5h^4r&10h^3r^2&10h^2r^3&5hr^4&r^5\end{pmatrix}$$

Questa matrice opera una trasformazione lineare sulla base del vettore **V**(i):

$$T_{h,r}\vec{V}(i)=\vec{V}(h+ri)$$

Dunque l'insieme di queste matrici forma un gruppo non commutativo isomorfo a quello della composizione di funzioni lineari ad una variabile.

Abbiamo quindi:

$$T_{a,b}T_{c,d} = T_{a+bc,bd}$$

$$T_{a,b}T_{a,b}^{-1} = T_{a,b}T_{-a/b,1/b} = T_{0,1} = I$$

Essendo $\mathbf{T_{h,r}=T_{0,r}T_{h/r,1}}$ possiamo scrivere la (2) come:

$$\vec{S}_{h,r}(n) = T_{0,r}T_{\frac{h}{r},1}A^{-1}n\vec{V}(n)$$

4.1 Potenze di T

$$T_{h,1} = T^h \ , \qquad T_{1,1} = T \ , \qquad T_{0,1} = T^0 = I$$

Il caso particolare r=1 individua il sottogruppo additivo dato che la moltiplicazione per T^h incrementa la base del vettore di potenze di h:

$$T^h\vec{V}(i) = \vec{V}(h+i)$$

Dunque l'insieme delle potenze di T con esponenti non solo interi (ma anche razionali, reali o complessi) con l'operazione di composizione costituiscono un gruppo abeliano isomorfo a quello dell'ordinaria addizione che inducono sulla base dei vettori V per cui si moltiplicano. Facendo riferimento alle somme indotte si constata che

$$T^0 = I \ , \quad T^hT^{-h} = I \ , \quad T^aT^b = T^bT^a = T^{a+b}$$
$$(T^aT^b)T^c = T^a(T^bT^c) = T^{a+b+c}$$

Notare che in questo modo

$$T^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h^2 & 2h & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h^3 & 3h^2 & 3h & 1 & 0 & 0 \\ h^4 & 4h^3 & 6h^2 & 4h & 1 & 0 \\ h^5 & 5h^4 & 10h^3 & 10h^2 & 5h & 1 \end{pmatrix}$$

si può calcolare per esempio T^{10} senza dover ripetere molte volte il prodotto righe per colonne.

5 Generalizzazione della formula di Faulhaber

Abbiamo visto che l'equazione (2) può scomporsi in

$$\vec{S}_{h,r}(n) = T_{0,r} T_{\frac{h}{r},1} A^{-1} n \vec{V}(n)$$

partendo da questo risultato nei prossimi paragrafi, per non far perdere il filo del discorso, verranno prima enunciati i teoremi che poi, solo dopo aver dimostrato altri teoremi, potranno essere dimostrati. Il tutto finalizzato ad esprimere questo risultato nello stile classico della formula di Faulhaber.

5.1 Teorema della matrice estesa (enunciato)

Dimostreremo nei prossimi paragrafi che la matrice $T^h A^{-1}$ può essere presentata alla Faulhaber cioè, nel caso di matrici a sei componenti (m=5), nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1\frac{1}{1}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{1}{2}B_1(h) & 1\frac{1}{2}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{1}{3}B_2(h) & 3\frac{1}{3}B_1(h) & 1\frac{1}{3}B_0(h) & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{1}{4}B_3(h) & 6\frac{1}{4}B_2(h) & 4\frac{1}{4}B_1(h) & 1\frac{1}{4}B_0(h) & 0 & 0 \\ 5\frac{1}{5}B_4(h) & 10\frac{1}{5}B_3(h) & 10\frac{1}{5}B_2(h) & 5\frac{1}{5}B_1(h) & 1\frac{1}{5}B_0(h) & 0 \\ 6\frac{1}{6}B_5(h) & 15\frac{1}{6}B_4(h) & 20\frac{1}{6}B_3(h) & 15\frac{1}{6}B_2(h) & 6\frac{1}{6}B_1(h) & 1\frac{1}{6}B_0(h) \end{pmatrix}$$

dove i $B_j(h)$ sono i polinomi di Bernoulli. Nel caso particolare in cui h=0 i polinomi danno i numeri di Bernoulli per cui otteniamo quanto già visto per A^{-1} .

5.2 Una funzione particolare chiamata tau

Indicheremo con “tau” una particolare funzione di due argomenti, che a una matrice quadrata e triangolare X_m (elementi $x_{1,1}...x_{m,m}$) e un vettore $\boldsymbol{Y_m}$ (componenti $y_1...y_m$) , associa una matrice R_m con elementi $r_{i,j}=x_{i,j}\, y_{i-j+1}$ dove il secondo fattore si assume uguale a zero quando l’indice non individua componenti del vettore (quando $i<j+1$). La matrice risultante può anche essere considerata come il prodotto, elemento per elemento, tra due matrici quadrate, quella del primo argomento e quella triangolare costruita ripetendo il vettore:

$$\tau(\begin{pmatrix} x_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y_1x_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ y_2x_{2,1} & y_1x_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nx_{n,1} & y_{n-1}x_{n,2} & \cdots & y_1x_{n,n} \end{pmatrix}$$

Esempio con sei componenti:

$$T^h = \tau(T, \vec{V}(h)) = \begin{pmatrix} 1V_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1V_1(h) & 1V_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1V_2(h) & 2V_1(h) & 1V_0(h) & 0 & 0 & 0 \\ 1V_3(h) & 3V_2(h) & 3V_1(h) & 1V_0(h) & 0 & 0 \\ 1V_4(h) & 4V_3(h) & 6V_2(h) & 4V_1(h) & 1V_0(h) & 0 \\ 1V_5(h) & 5V_4(h) & 10V_3(h) & 10V_2(h) & 5V_1(h) & 1V_0(h) \end{pmatrix}$$

5.3 Binomio di Newton umbrale

Dati un vettore **X** con componenti X_0, X_1...X_n e uno **Y** con componenti Y_0, Y_1...Y_n definiamo, mediante un'operazione che chiameremo potenza umbrale, un vettore Z con componenti Z_0, Z_1...Z_n tale che:

$$\tau(T, \vec{Z}) = \tau(T, \vec{X})\tau(T, \vec{Y})$$

dal prodotto righe per colonne tale operazione risulta commutativa e il vettore Z ha la generica componente data da:

$$Z_j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} X_k Y_{j-k} := (X+Y)^j$$

la notazione del calcolo umbrale rievoca lo sviluppo del binomio di Newton dove però le componenti del vettore sostituiscono gli esponenti

. Risulta quindi;

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1X_0Y_0 \\ Z_1 &= 1X_0Y_1 + 1X_1Y_0 \\ Z_2 &= 1X_0Y_2 + 2X_1Y_1 + 1X_2Y_0 \\ Z_3 &= 1X_0Y_3 + 3X_1Y_2 + 3X_2Y_1 + 1X_3Y_0 \\ Z_4 &= 1X_0Y_4 + 4X_1Y_3 + 6X_2Y_2 + 4X_3Y_1 + 1X_4Y_0 \\ Z_5 &= 1X_0Y_5 + 5X_1Y_4 + 10X_2Y_3 + 10X_3Y_2 + 5X_4Y_1 + 1X_5Y_0 \end{aligned}$$

da cui generalizzando

$$\boxed{\vec{Z} = \tau(T, \vec{Y})\vec{X}}$$

questo ci permette, sostituendo il valore trovato del vettore **Z,** di riscrivere la prima equazione del paragrafo:

$$\boxed{\tau(T, \vec{X})\tau(T, \vec{Y}) = \tau(T, \tau(T, \vec{Y})\vec{X}) = \tau(T, \tau(T, \vec{X})\vec{Y})}$$

dove viene anche sfruttata la commutatività della somma di vettori elevati a potenza umbrale.

5.4 Teorema del fattore potenza di T

Essendo

$$T^h = \tau(T, \vec{V}(h))$$

dall' equazione ricavata in 5.4, come caso particolare, si ottiene:

$$\boxed{T^h \tau(T, \vec{X}) = \tau(T, T^h \vec{X})}$$

Posto

$$\vec{X}(0) = \vec{X}$$

ciò permette di definire, al variare di h, non solo tra gli interi, una vasta classe di vettori:

$$\vec{X}(h) = T^h \vec{X}(0)$$

di particolare interesse qui:

$$\vec{V}(h) = T^h \vec{V}(0)$$

che già abbiamo visto e

$$\vec{B}(h) = T^h \vec{B}(0)$$

che potrebbe essere utilizzato per definire i polinomi di Bernoulli dato che le componenti di questo vettore sono i polinomi di Bernoulli [Pietrocola, 2018] calcolati in h

$B_0(h)$, $B_1(h)$, $B_2(h)$, ...

5.5 Una forma equivalente per la matrice A^{-1}

La matrice che in 3,1 abbiamo dimostrato essere inversa della A può essere presentata in una forma alternativa.

Infatti gli elementi non nulli delle righe che hanno la forma

$$\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{j}$$

al variare di j da 1 a m+1 possono diventare:

$$\frac{1}{m+1}\frac{(m+1)!}{j!(m+1-j)!} = \frac{m!}{j(j-1)!(m+1-j)!} = \frac{1}{j}\binom{m}{j-1}$$

per la matrice diventa:

$$A^{-1} = \tau(T,\vec{B})N^{-1} = \begin{pmatrix} 1B_0\frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1B_1\frac{1}{1} & 1B_0\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1B_2\frac{1}{1} & 2B_1\frac{1}{2} & 1B_0\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1B_3\frac{1}{1} & 3B_2\frac{1}{2} & 3B_1\frac{1}{3} & 1B_0\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1B_4\frac{1}{1} & 4B_3\frac{1}{2} & 6B_2\frac{1}{3} & 4B_1\frac{1}{4} & 1B_0\frac{1}{5} & 0 \\ 1B_5\frac{1}{1} & 5B_4\frac{1}{2} & 10B_3\frac{1}{3} & 10B_2\frac{1}{4} & 5B_1\frac{1}{5} & 1B_0\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

dove N e una matrice diagonale con gli interi positivi inizianti da 1 e la sua inversa una matrice diagonale con i reciproci degli interi positivi sempre inizianti da 1.

5.6 Teorema della matrice estesa (dimostrazione)

Fatte le dovute premesse possiamo ora dimostrare il teorema enunciato in 5.1

infatti:

$$T^h A^{-1} = T^h \tau(T,B)N^{-1} = \tau(T,T^h B)N^{-1} = \tau(T,B(h))N^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\frac{1}{1}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1\frac{1}{1}B_1(h) & 1\frac{1}{2}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1\frac{1}{1}B_2(h) & 2\frac{1}{2}B_1(h) & 1\frac{1}{3}B_0(h) & 0 & 0 & 0 \\ 1\frac{1}{1}B_3(h) & 3\frac{1}{2}B_2(h) & 3\frac{1}{3}B_1(h) & 1\frac{1}{4}B_0(h) & 0 & 0 \\ 1\frac{1}{1}B_4(h) & 4\frac{1}{2}B_3(h) & 6\frac{1}{3}B_2(h) & 4\frac{1}{4}B_1(h) & 1\frac{1}{5}B_0(h) & 0 \\ 1\frac{1}{1}B_5(h) & 5\frac{1}{2}B_4(h) & 10\frac{1}{3}B_3(h) & 10\frac{1}{4}B_2(h) & 5\frac{1}{5}B_1(h) & 1\frac{1}{6}B_0(h) \end{pmatrix}$$

o equivalentemente per quanto mostrato:

$$\begin{pmatrix} 1\frac{1}{1}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{1}{2}B_1(h) & 1\frac{1}{2}B_0(h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{1}{3}B_2(h) & 3\frac{1}{3}B_1(h) & 1\frac{1}{3}B_0(h) & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{1}{4}B_3(h) & 6\frac{1}{4}B_2(h) & 4\frac{1}{4}B_1(h) & 1\frac{1}{4}B_0(h) & 0 & 0 \\ 5\frac{1}{5}B_4(h) & 10\frac{1}{5}B_3(h) & 10\frac{1}{5}B_2(h) & 5\frac{1}{5}B_1(h) & 1\frac{1}{5}B_0(h) & 0 \\ 6\frac{1}{6}B_5(h) & 15\frac{1}{6}B_4(h) & 20\frac{1}{6}B_3(h) & 15\frac{1}{6}B_2(h) & 6\frac{1}{6}B_1(h) & 1\frac{1}{6}B_0(h) \end{pmatrix}$$

come dovevasi dimostrare

5.7 Teorema della formula di Faulhaber estesa

Possiamo ora esprimere mediante un'unica matrice
la formula generale (2) espressa nella forma precedentemente individuata:

$$\vec{S}_{h,r}(n) = T_{0,r}T_{\frac{h}{r},1}A^{-1}n\vec{V}(n)$$

In base a quanto visto

$$T_{0,r}\begin{pmatrix} 1\frac{1}{1}B_0(\frac{h}{r}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{1}{2}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{1}{2}B_0(\frac{h}{r}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{1}{3}B_2(\frac{h}{r}) & 3\frac{1}{3}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{1}{3}B_0(\frac{h}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{1}{4}B_3(\frac{h}{r}) & 6\frac{1}{4}B_2(\frac{h}{r}) & 4\frac{1}{4}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{1}{4}B_0(\frac{h}{r}) & 0 & 0 \\ 5\frac{1}{5}B_4(\frac{h}{r}) & 10\frac{1}{5}B_3(\frac{h}{r}) & 10\frac{1}{5}B_2(\frac{h}{r}) & 5\frac{1}{5}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{1}{5}B_0(\frac{h}{r}) & 0 \\ 6\frac{1}{6}B_5(\frac{h}{r}) & 15\frac{1}{6}B_4(\frac{h}{r}) & 20\frac{1}{6}B_3(\frac{h}{r}) & 15\frac{1}{6}B_2(\frac{h}{r}) & 6\frac{1}{6}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{1}{6}B_0(\frac{h}{r}) \end{pmatrix} =$$

ed eseguendo la moltiplicazione con la matrice diagonale otteniamo:

$$= \begin{pmatrix} 1\frac{1}{1}B_0(\frac{h}{r}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{r}{2}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{r}{2}B_0(\frac{h}{r}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{r^2}{3}B_2(\frac{h}{r}) & 3\frac{r^2}{3}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{r^2}{3}B_0(\frac{h}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{r^3}{4}B_3(\frac{h}{r}) & 6\frac{r^3}{4}B_2(\frac{h}{r}) & 4\frac{r^3}{4}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{r^3}{4}B_0(\frac{h}{r}) & 0 & 0 \\ 5\frac{r^4}{5}B_4(\frac{h}{r}) & 10\frac{r^4}{5}B_3(\frac{h}{r}) & 10\frac{r^4}{5}B_2(\frac{h}{r}) & 5\frac{r^4}{5}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{r^4}{5}B_0(\frac{h}{r}) & 0 \\ 6\frac{r^5}{6}B_5(\frac{h}{r}) & 15\frac{r^5}{6}B_4(\frac{h}{r}) & 20\frac{r^5}{6}B_3(\frac{h}{r}) & 15\frac{r^5}{6}B_2(\frac{h}{r}) & 6\frac{r^5}{6}B_1(\frac{h}{r}) & 1\frac{r^5}{6}B_0(\frac{h}{r}) \end{pmatrix}$$

questo risultato può essere generalizzato e espresso come:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(h+rk)^m = \frac{r^m}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}B_{m-k}(\frac{h}{r})n^{k+1} \qquad (3)}$$

che estende la tradizionale formula di Faulhaber ad una progressione aritmetica qualsiasi

5.8 Calcolo umbrale e proprietà traslatoria

Con la notazione del calcolo umbrale, assimilando l'indice del polinomio a un esponente, la precedente (3) si può scrivere:

$$S_{h,r}^{m}(n) = \frac{r^m}{m+1}((B(\frac{h}{r}) + n)^{m+1} - B_{m+1}(\frac{h}{r}))$$

per la proprietà traslatoria dei polinomi di Bernoulli (e più in generale di quelli di Appell) risulta:

$$(B(\frac{h}{r}) + n)^{m+1} = B_{m+1}(\frac{h}{r} + n)$$

per cui:

$$S_{h,r}^{m}(n) = \sum_{k=0}^{n-1}(h+kr)^m = \frac{r^m}{m+1}(B_{m+1}(\frac{h}{r} + n) - B_{m+1}(\frac{h}{r}))$$

6. Bibliografia

1. Jacob Bernoulli, *“Summae potestatum“ in “Artis Conjectandi*”, Internet Archive (p.97),1713

2. Attilio Frajese (a cura di), Opere di Archimede, UTET, 1974.

3. J.Beery, Sum of power of positive integer, Mathematical association of America (MMA), in https://www.maa.org

4. Frank J. Swetz and Victor J. Katz Johann ,Mathematical treasures: Faulhaber’s Accademiae Algebrae, MMA

5.Jacobi, Carl (1834). "De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae". Journal für die reine und angewandte Mathematik. 12. pp. 263–72.

6. Donald Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Internet Archive, 1992

7. Giorgio Pietrocola, *Esplorando un antico sentiero: teoremi sulla somma di potenze di interi successivi*, Maecla 2008

8.Giorgio Pietrocola Sui polinomi per somme di potenze di interi successivi www.pietrocola.eu ,2018

9. Mcmillan Sondow, Proof of power sum and binomial coefficient congruences via Pascal’s identity, Internet Archive, 2010

10. L.E.Coen, Sums of powers and bernoulli numbers, Illinois, 1995

11. Gottfried Helms , Identities involving binomial-coefficients, Bernoulli- and Stirling numbers ,Univ Kessel 2006

12. A.W.F. Edwards. Sums of powers of integers *Mathematical Gazette 66 ,1982, pp 22-29*

13. A.W.F Edwards Pascal’s arhitmetical triangle.The story of a mathematical idea The Johns University Press Baltimore and London 1987

14, A. Bazso, I.Mezo On the coefficients of power sums of arithmetic progressions, 2015

6.1 Implementazione su foglio di calcolo

Giorgio Pietrocola, Foglio di calcolo: Generalizzazione formula di Faulhaber, risolta con matrici derivanti dal triangolo di Tartaglia, su www.pietrocola.eu, 2018

6.2 Citazioni in articoli

1.Nigel Derby, The continued search for sums of powers, Mathematical Gazette, Volume 103, Issue 556, pp. 94-100, marzo 2019

2. Christine Taylor, Faulhaber Problem Revisited: Alternate Methods for Deriving the Bernoulli Numbers, 27 Dicembre 2018 arXiv:1812.10831 (Cornell University)